Mathématiques
Indications de correction

Exercice 1 : (4 points)

a. $\boldsymbol{A} = \frac{11}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{11}{8} + \frac{2}{8} = \frac{11+2}{8} = \boxed{\frac{13}{8}}$

b. $\boldsymbol{B} = \left(\frac{11}{7} + \frac{1}{4}\right) \div \left(13 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{11\times4}{7\times4} + \frac{1\times7}{4\times7}\right) \div \left(\frac{13\times4}{1\times4} - \frac{1}{4}\right)$

$= \left(\frac{44}{28} + \frac{7}{28}\right) \div \left(\frac{52-1}{4}\right) = \frac{51}{28} \div \frac{51}{4} = \frac{51}{28} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{28} = \frac{4\times1}{4\times7} = \boxed{\frac{1}{7}}$

Exercice 2 : (6 points)

Développons, réduisons et ordonnons chacune des expressions suivantes, en faisant apparaître les détails de chaque calcul :

$$\boldsymbol{A} = (2a + 5)(a - 5) = 2a^2 - 10a + 5a - 25 = \boxed{\mathbf{2a^2 - 5a - 25}}$$

$$\boldsymbol{B} = (5b + 4)(3 - 2b) = 15b - 10b^2 + 12 - 8b = \boxed{\mathbf{-10b^2 + 7b + 12}}$$

$$\boldsymbol{C} = (9x + 4)(9x - 4) = (9x)^2 - 4^2 = \boxed{\mathbf{81x^2 - 16}}$$

Ce dernier calcul est un développement d'une identité remarquable du type « $(a + b)(a - b)$ »

Exercice 3 : (6 points)

On donne les deux fonctions g et h, définies par les formules algébriques suivantes :

$$g(x) = \frac{3}{8}x + 2 \quad ; \quad h(x) = -2x^2 + 1$$

1. On a : $g(\mathbf{4}) = \frac{3}{8} \times \mathbf{4} + 2 = \frac{3}{2\times4} \times \frac{4}{1} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}$.

   L'image de 4 par la fonction g est donc $\frac{7}{2}$.

2. ***a.*** On calcule $h(-5)$: $h(\mathbf{-5}) = -2 \times (\mathbf{-5})^2 + 1 = -2 \times 25 + 1 = -50 + 1 = \boxed{-49}$

   b. -7 est un antécédent de 2 par h si et seulement si $h(-7) = 2$.
   Ici on a :
   $h(-7) = -2 \times (-7)^2 + 1 = -2 \times 49 + 1 = -98 + 1 = \boxed{-97}$ ...
   Donc -7 n'est pas un antécédent de 2 par h.

Exercice 4 : (5 points)

On donne le programme de calcul suivant :

1. On peut schématiser la situation avec le diagramme suivant :

   $-2 \xrightarrow{+4} 2 \xrightarrow{\times(-2)} -4 \xrightarrow{+4} \boxed{\mathbf{0}}$

   Donc lorsqu'on choisit -2 au départ, on obtient bien 0 à l'arrivée.

2. Si on choisit 5 au départ, on a :

   $5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{\times5} 45 \xrightarrow{+4} \boxed{\mathbf{49}}$

3. On définit une fonction f qui, à tout nombre x choisi à l'entrée du programme, associe le résultat obtenu à la fin de ce programme.

   a. Pour déterminer l'expression de f il suffit de remplacer les nombres précédents par un nombre x quelconque. On a alors :

   $$x \xrightarrow{+4} (x + 4) \xrightarrow{\times x} (x + 4) \times x \xrightarrow{+4} \boxed{\mathbf{(x + 4) \times x + 4}}$$

   b. On développe l'expression en appliquant la distributivité :

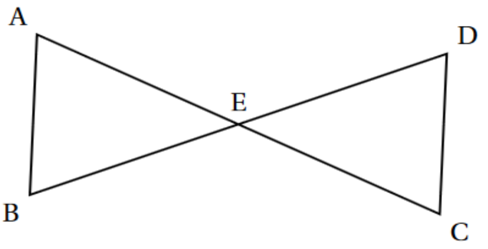
   $f(x) = (x + 4) \times x + 4 = x \times x + 4 \times x + 4 = \boxed{\mathbf{x^2 + 4x + 4}}$.

Exercice 5 : (8 points)

Les points A, E et C sont alignés, ainsi que les points B, E et D.

AE = 7,2 cm ; EC = 5,4 cm ;

ED = 7,5 cm et BE = 10 cm.



a. Dans la configuration donnée, les points A, E et C sont alignés dans cet ordre. Les points B, E et D sont alignés dans cet ordre. On a :

D'une part : $\frac{EA}{EC} = \frac{7{,}2}{5{,}4} = \frac{72}{54} = \frac{9\times8}{9\times6} = \frac{2\times4}{2\times3} = \frac{4}{3}$

D'autre part : $\frac{EB}{ED} = \frac{10}{7{,}5} = \frac{100}{75} = \frac{4\times25}{3\times25} = \frac{4}{3}$

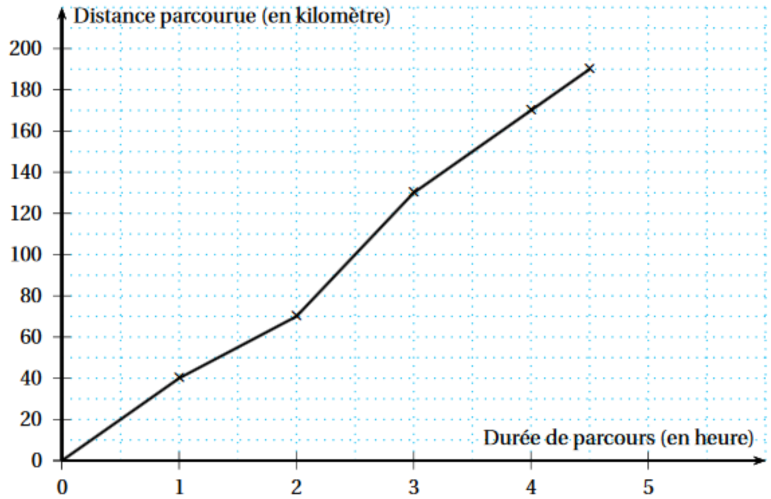
On remarque que les rapports $\frac{EA}{EC}$ et $\frac{EB}{ED}$ sont égaux, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut dire que les droites (AB) et (DC) sont bien parallèles.

b. Sachant que :

- Les droites (AC) et (BD) se coupent en E,
- Les points A, E, C et B, E, D sont alignés dans cet ordre,
- Les droites (AB) et (DC) sont parallèles,

Le théorème de Thalès peut s'appliquer et on a les égalités de rapports suivantes : $\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$; en particulier $\frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$. D'où : $\frac{10}{7{,}5} = \frac{AB}{6{,}3}$ soit, en appliquant la propriété des produits en croix : $AB = \frac{10\times6{,}3}{7{,}5} = \frac{63}{7{,}5} = \boxed{8{,}4\ cm}$.

Exercice 6 : (4 points)



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

Aucune justification n'est demandée.

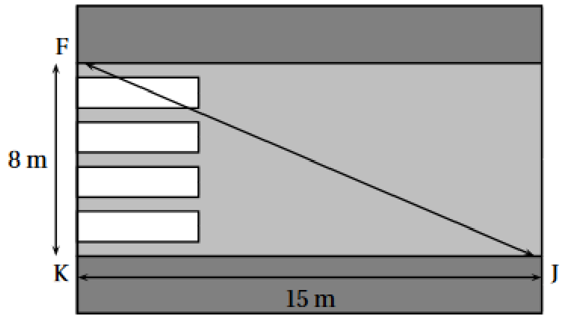
1. ***a.*** La distance totale de cette étape est de **190 km**.

   b. Sachant que l'antécédent de 100 est 2,5 ; on peut dire que pour parcourir les 100 premiers km, le coureur à mis **2 H 30 min**.

   c. Lors de la dernière demi-heure de course le coureur a parcouru **20 km**.

2. Une situation de proportionnalité se représente graphiquement par une droite qui passe par l'origine d'un repère ; c'est-à-dire la représentation graphique d'une fonction linéaire. Ce qui n'est pas le cas ici. Cette représentation graphique passe bien par l'origine mais n'est pas une droite… donc ce n'est pas une situation de proportionnalité. C'est tout à fait normal puisque sur son trajet, le coureur cycliste accélère, ralenti… bref, sa vitesse n'est pas constante !

Exercice 7 : (7 points)



Combien de temps Julien a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton ?
Puisque le triangle EKJ est rectangle en K, le théorème de Pythagore peut s'appliquer et on peut écrire que :

$$FJ^2 = FK^2 + KJ^2$$
$$FJ^2 = 8^2 + 15^2$$
$$= 64 + 225$$
$$= 289$$

Et comme $FJ > 0$; on a $FJ = \sqrt{289} = \boxed{\mathbf{17\ m}}$.

De plus, on nous dit qu'en moyenne, un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètres.
Donc pour parcourir 17 m, il mettra :

$$9\ secondes \longrightarrow 10\ m$$
$$x\ secondes \longrightarrow 17\ m$$

D'où : $x = \frac{9\times17}{10} = \frac{153}{10} = 15{,}3\ secondes$ … pour traverser la rue en ***diagonale.***

La durée totale du parcours (donc en utilisant les passages piétons, c'est à dire sur une distance de $8 + 15 = 23\ m$) est de :

$$9\ secondes \longrightarrow 10\ m$$
$$x'\ secondes \longrightarrow 23\ m$$

D'où : $x' = \frac{9\times23}{10} = \frac{207}{10} = 20{,}7\ secondes$ … pour traverser la rue en ***utilisant le passage piéton.***

Le temps gagné par Julien est donc de : $20{,}7 - 15{,}3 = \boxed{\mathbf{5{,}4\ secondes}}$
Cela ne valait donc pas vraiment le coup que Julien prenne des risques en traversant en dehors des clous…